

ЛЕКЦИЯ 4 по “Приложна математика”, сп. БИТ

Катедра “Приложна математика и моделиране”

Доц. д-р Снежана Г. Гочева, каб. 540

Тема 5. Неопределен интеграл – свойства, пресмятане.

В предната лекция и упражненията разгледахме понятието производна на функция. Нека е дадена функция $g(x)$, дефинирана в някакъв отворен интервал (a, b) и нека за всяка точка x от (a, b) съществува производната $g'(x)$. Казваме още, че $g(x)$ е диференцируема в (a, b) .

Задачата при дадена функция $g(x)$ да се намери нейната производна функция $g'(x)$ ще запишем формално така:

$g(x) \xrightarrow{\text{диференциране}} g'(x)$, където $'$ е знак за диференциране.

Ако тук използваме означението за диференциал на $g(x)$ (виж по-подробно лекция 3), ще имаме

$$dg(x) = g'(x)dx \quad (1)$$

В много задачи се налага да се реши **обратната задача** или задачата за **антидиференциране**, която се формулира така:

Ако е известна някаква функция $f(x)$, дефинирана и непрекъснатата в (a, b) да се намери диференцируема в (a, b) функция $F(x)$, чиято производна да е равна на $f(x)$. Математическото действие се нарича интегриране, или формално

$$f(x) \xrightarrow{\text{интегриране}} F(x), \text{ така че}$$

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)dx. \quad (2)$$

Лесно се съобразява, че ако последните равенства са верни за някаква функция $F(x)$, **те са верни и за $F(x) + C$** , тъй като производната на константа C е винаги нула. Следователно задачата за интегрирането има безброй решения. Така стигаме до следното

Определение 4.1. Една функция $F(x)$ се нарича **примитивна функция** или **неопределен интеграл** на $f(x)$, ако

$$F'(x) = f(x) \quad (2)$$

и с помощта на знаците за диференциал и интеграл $\int$ се бележи с

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (3)$$

(четем „интеграл от еф де хикс е равно на еф голямо от хикс плюс це”).

Важно е да се подчертае, че **на практика неопределеният интеграл е фамилия от функции $F(x) + C$** , с отчитането на произволна константа C за всяка примитивна $F(x)$!

Тук дадената функция $f(x)$ между знака за интеграл и диференциал се нарича **подинтегрална функция**, а независимата променлива x - **интеграционна променлива**.

Пример 1. Да се изчисли интеграл от 1.

Решение: В случая $f(x) = 1$. Записваме задачата като $\int 1 dx = ?$ или опростено като $\int dx$. Търсим функция, чиято производна е равна на 1. Тъй като $x' = 1$ веднага намираме, че $F(x) = x + C$. Следователно:

$$\int dx = x + C \quad (4)$$

В частност това означава, че **знаците за интегриране и диференциране като противоположни действия едно до друго „се унищожават”** и остава само интеграционната променлива x с добавена константа.

Пример 2. Да се изчисли интеграл от $\cos(x)$.

Решение: От таблицата на производните знаем, че производната на $F(x) = \sin(x)$ е равна на $f(x) = \cos(x)$. Следователно по Определение 4.1:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (5)$$

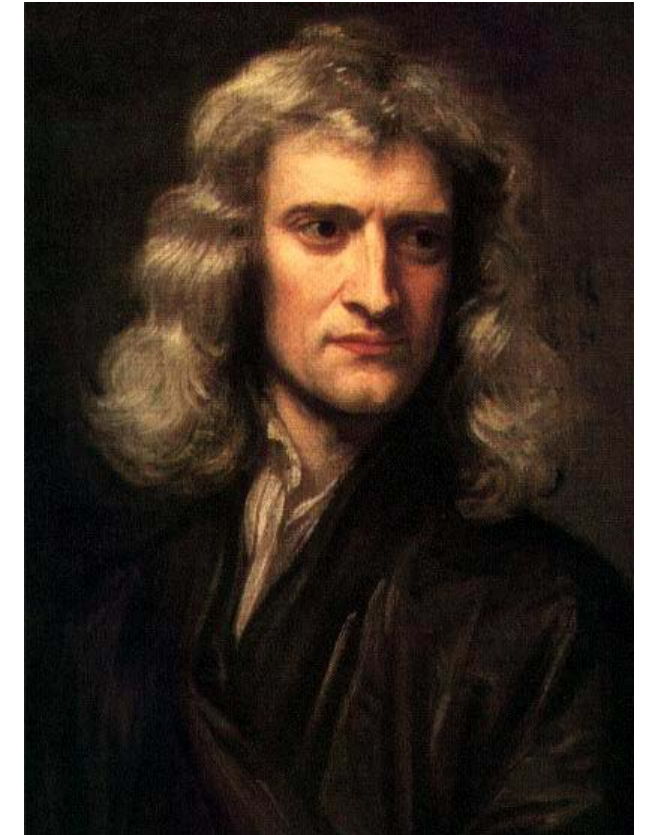
Пример 3. Да се изчисли интегралът $\int e^x dx$.

Решение: От таблицата на производните знаем, че производната на e^x е равна на e^x . Следователно по Определение 4.1:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (6)$$

Диференциалното и интегрално смятане имат големи приложения във всички области на науката и практиката. Някои техни елементи са били използвани още от древността от Архимед, но получават съществено развитие в трудовете на Исак Нютон и Готфрид Лайбниц през втората половина на 17 век.

Сър Исак Нютон е английски физик, математик, астроном и философ, постигнал изключителни успехи във всички области, в които е работил. Най-известният му труд е „Математически принципи на натурфилософията“, публикуван през 1687, в който е изложил закона за всемирното привличане и три закона на механиката, с които поставя основите на класическата механика. Работейки над проблемите на физиката, Исак Нютон поставя началото на математическия анализ (диференциалното и интегрално смятане), който е в основата на развитието на науката до наши дни. Разработил е също теорията за разлагане на светлината и много други математически и физически теории.



Исак Нютон
(1643 – 1727)

Основните математически постижения на разностранния немски учен **Готфрид Лайбниц** са в областта на математическия анализ и на формализирането на математиката. В лайпцигските "Acta eruditorum" публикува разработеното от него диференциално смятане през 1684 г., а интегралното смятане - през 1686г.

Първата работа съдържа знаците за диференциране, правила за диференциране, твърдения за екстремумите и инфлексните точки. Втората работа съдържа знака за интеграл.

Лайбниц разработва анализа независимо от Исак Нютон, но въпреки това между тях се разгаря продължителен и безсмислен спор за приоритет.



**Готфрид Лайбниц
(1646 – 1716)**

СВОЙСТВА НА НЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛ

Свойство 1⁰. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

Доказателство: Следва веднага от (2) и (3), тъй като

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Свойство 2⁰. Интеграл от сума е сумата от интегралите:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Доказателство: Да означим с $F(x)$ и $G(x)$ примитивните на $f(x)$ и $g(x)$.

От свойствата на производните:

$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$. Освен това по определението

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C = (F(x) + c_1) + (G(x) + c_2) = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

където $C = c_1 + c_2$.

Свойство 3⁰ . Изнасяне на константа: $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.

Доказателство: Да означим с $F(x)$ примитивната на $f(x)$. От свойствата на производните:

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x), \text{ но } \int \lambda f(x) dx = \lambda F(x) + C = \lambda(F(x) + c_\lambda) = \lambda \int f(x) dx$$

Свойство 4⁰ . $\int g'(x) dx = g(x) + C$

Автоматично следва от Определение 4.1.

Свойство (4⁰) се нарича „внасяне под знака на диференциала” и се използва често за смяна на интеграционната променлива x с нова променлива $u = g(x)$.

В (2) имаме $dF(x) = f(x)dx$. Когато преобразуваме израза $f(x)dx$ във вида $dF(x)$ се казва, че функцията $f(x)$ **се внася под знака на диференциала**, а когато преобразуваме израза $dF(x)$ във вида $f(x)dx$ се казва, че функцията $F(x)$ **се изнася пред знака на диференциала**.

Пресмятане на неопределен интеграл

По същество намирането на примитивната функция става чрез основната таблица на интегралите, свойствата и преобразования.

Техника 1 **Непосредствено интегриране** (Свеждане до табличен интеграл)

$$1. \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$2. \int \left(\frac{5}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{5}{x} dx + \int \sin x dx = 5 \int \frac{dx}{x} + \int \sin x dx = \ln |x| - \cos x + C$$

$$\int (x-1)^3 dx = \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx = \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 3 \int x dx + \int 1 dx$$

$$3. \quad = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x + \ln|x| + C$$

$$4. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Техника 2 **Интегриране чрез полагане**

Когато в подинтегралната функция има сложен израз, който “ни пречи”, можем да се опитаме да направим смяна на интеграционната променлива, като направим подходящо полагане.

Нека в неопределения интеграл $\int f(x)dx$ да сменим интеграционната променлива x с нова променлива t , чрез полагането

$$\boxed{x = \varphi(t)},$$

където $\varphi(t)$ е непрекъснатата функция с непрекъснатата производна в разглеждания интервал и има обратна функция $\boxed{t = \psi(x)}$, т.е. $\boxed{\varphi(\psi(x)) = x}$. За да преминем към новата променлива t пресмятаме и диференциала

$$\boxed{dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt}.$$

Заместваме всичко в изходния интеграл и получаваме:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt \quad (7)$$

$$5. \int (x+1)^{100} dx, \text{ полагаме } \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=t'.dt=1.dt \\ d(x+1)=dx+d(1)=dx, \end{array} \boxed{d(x+\lambda)=dx}$$

$$\int t^{100} dt = \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+1)^{101}}{101} + C$$

$$6. \int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x) d(3x) \Big\| \text{ полагаме } t=3x, \boxed{d(\lambda x)=\lambda \cdot dx} \boxed{d(3t)=3dt}$$

$$\frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

$$7. \int (5x-7)^7 dx = \frac{1}{5} \int (5x-7)^7 d(5x-7) = \frac{1}{5} \frac{(5x-7)^8}{8} + C$$

$$8. \int \frac{1}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + (\sqrt{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$9. \int \frac{1}{2-x^2} dx = -\int \frac{1}{(x^2-2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - (\sqrt{2})^2} dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C$$

$$10. \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Полагаме $t = \ln x \Rightarrow dt = (\ln x)' \cdot dx = \frac{1}{x} dx$. Преминаваме от променлива x към t :

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |\ln |x|| + C$$

$$\begin{aligned} 11. \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d 2x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

Упътване: Намаляваме степента с формулата:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$12. I = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \cos^2 x d \sin x$$

ИЗПОЛЗВАМЕ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$I = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \int 1 \cdot d \sin x - \int \sin^2 x \cdot d \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Домашна работа:

а) $\int \sin^3 x dx$, б) $\int \sin^3 5x dx$

$$\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{1-x^2}{x^2(1-x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

13.
$$= \int x^{-2} dx - \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$14. \int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x + \arctan x + C$$

$$15. \int \frac{2}{x^2(x^2 + 1)} dx = 2 \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = 2 \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx - 2 \int \frac{x^2}{x^2(x^2 + 1)} = 2 \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \dots$$

$$16. \int \frac{1}{x-3} dx = \int (x-3)^{-1} d(x-3) = \ln|x-3| + C, \text{ с вносяне } \boxed{d(x+\lambda) = dx}.$$

$$17. \int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} d(5x) = \frac{1}{5} \arcsin 5x + C$$

$$18. \int \frac{1}{9+4x^2} dx = \int \frac{1}{3^2 + (2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3^2 + (2x)^2} d(2x) = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C$$

$$19. \int \frac{1}{e^{3x-2}} dx = \frac{1}{-3} \int e^{-3x+2} d(-3x+2) = -\frac{1}{3} e^{-3x+2} + C = -\frac{1}{3e^{3x-2}} + C,$$

защото $\boxed{\int e^t dt = e^t + C}.$

$$20. \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

$$21. \int \frac{1}{\sqrt{5x^2-4}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1}} d\left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5x^2-4} \right| + C$$

$$\begin{aligned}
 22. \int \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})} dx = \int \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}}{5} dx = \\
 &= \frac{1}{5} \int \sqrt{x+2} \cdot d(x+2) + \frac{1}{5} \int \sqrt{x-3} \cdot d(x-3) = \frac{2}{15} (x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15} (x-3)^{\frac{3}{2}} + C
 \end{aligned}$$

$$23. \int \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx = \int \frac{1}{\arctan x} d(\arctan x) = \ln |\arctan x| + C$$

$$24. I = \int \frac{5x-3}{7+2x^2} dx = 5 \int \frac{x}{7+2x^2} dx - 3 \int \frac{dx}{7+2x^2} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = 5 \int \frac{x}{7 + 2x^2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{7 + 2x^2} dx^2 =$$

$$\frac{5}{4} \int \frac{1}{7 + 2x^2} d(2x^2 + 7) = \frac{5}{4} \ln(7 + 2x^2) + C,$$

$$I_2 = 3 \int \frac{dx}{7 + 2x^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(\sqrt{7})^2 + (x\sqrt{2})^2} d\sqrt{2}x = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$$I = \ln(7 + 2x^2) - \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$$25. \int (\cos^5 x \cdot \sin x) dx = \int \cos^5 x d(-\cos x) = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$$

$$\cos x = t$$

с полагане: $d(\cos x) = -\sin x dx = dt \rightarrow \boxed{-\sin x dx = dt}$

$$26. \int \frac{x^2}{\cos^2(1+2x^3)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{d(2x^3+1)}{\cos^2(1+2x^3)} = \frac{1}{6} \tan(2x^3+1) + C$$

Интегриране с Mathematica: Използваме вградената функция :

$$I = \int f(x) dx$$

ИЛИ

```
Integrate[ f[x], x]
```

Техника 3. **Интегриране по части**

$$\int u.v'.dx = \int u.dv \quad - \text{ след внасяне под знака на диференциала.}$$

Формула за интегриране по части: $\int u dv = u.v - \int v du$

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \int x d\left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \\ 27. \quad &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C \end{aligned}$$

$$28. \quad I = \int \arctan x \cdot d x = x \cdot \arctan x - \int x \cdot d(\arctan x)$$

Тук сме интегрирали веднъж по части като $u = \arctan x$, $v = x$
 По-нататък използваме, че

$$d(\arctan x) = (\arctan x)' \cdot dx = \frac{1}{1+x^2} dx$$

Така получаваме:

$$I = x \cdot \arctan x - \int x \cdot d(\arctan x) = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} d =$$

$$x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\begin{aligned}
29. \quad \int x \cdot \arctan x \cdot dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x \cdot d(x^2) = \boxed{\text{вносяме } x} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot d(\arctan x) = \\
&\frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\
&\frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{-1}{1+x^2} dx = \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30. \quad I &= \int e^x \sin x \cdot dx = -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot d(e^x) = \\
 &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \cdot dx = -e^x \cos x + e^x \cos x - \int \sin x \cdot d(e^x) = \\
 &= -e^x \cos x + e^x \cos x - \int e^x \sin x \cdot dx
 \end{aligned}$$

т.е. получихме отдясно търсения интеграл $\int e^x \sin x \cdot dx$.

Или уравнението относно интеграла I : $I = e^x (\sin x - \cos x) - I$.

Оттук:
$$2I = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

Домашна работа: а) $\int e^{2x} \sin x \cdot dx$, б) $\int x^2 \arctan x \cdot dx$. Упътване към б): Внася се “по-леката” функция (виж по-нататък).

Тежест на функциите при интегриране по части

най-лека	e^x
леки	$\sin x, \cos x$
тежки	$1, x, x^2 \dots x^n$
най-тежки	$\arctan x, \arcsin x, \dots$

Допълнителни задачи:

$$31. \int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln |\cos x| + C$$

$$\begin{aligned}
 32. \quad \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \\
 &\frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$